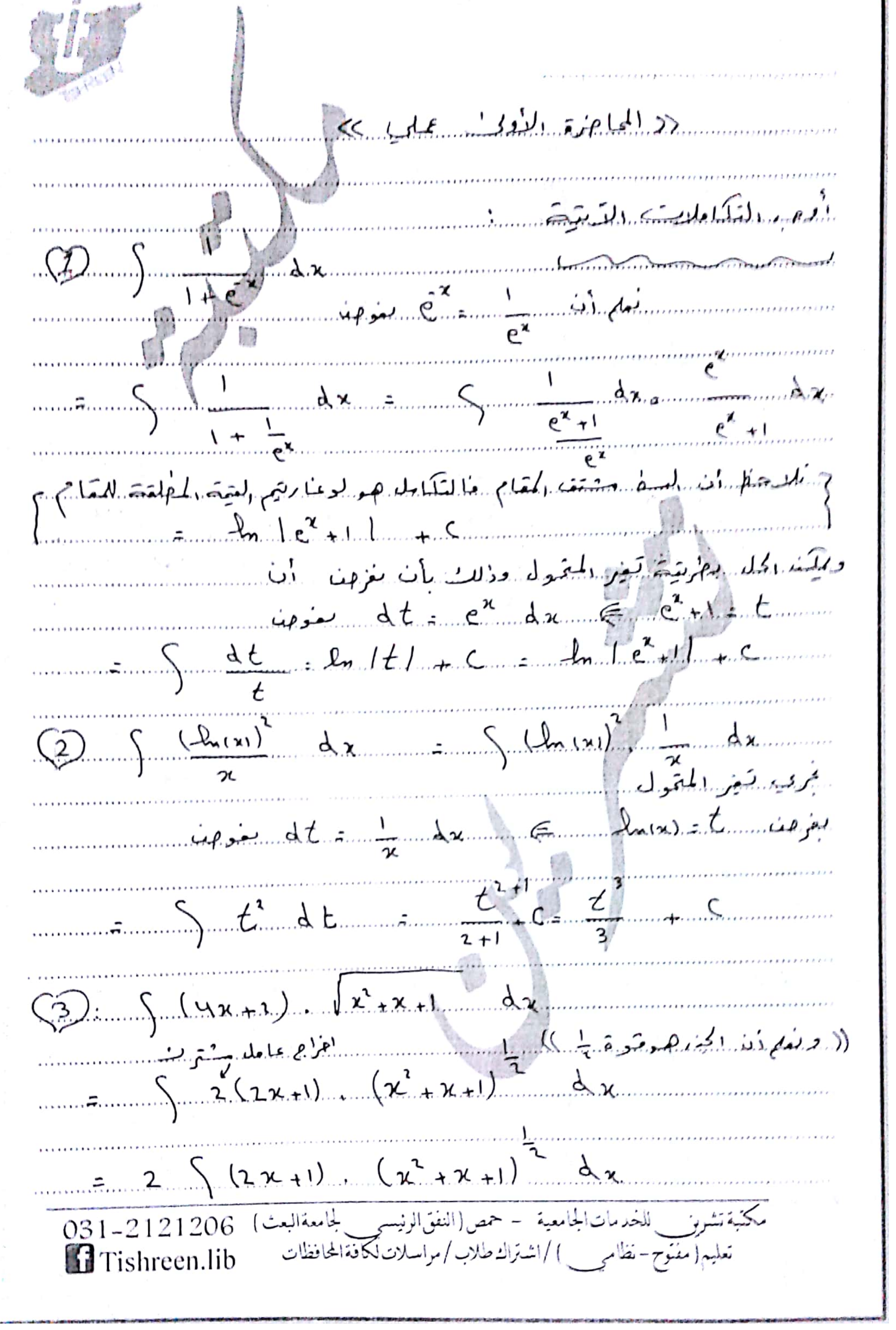


<< المحاضرة الأولى عملي >>

أوجد التكاملات الآتية :

(1) $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

نعلم أن $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$ نعوض

$= \int \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}\,dx = \int \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\,dx$

{ نلاحظ أن البسط مشتق المقام فالتكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام }

$= \ln|e^{x}+1| + c$

ويمكن الحل بطريقة تغير المتحول وذلك بأن نفرض أن

$e^{x}+1 = t \Leftarrow dt = e^{x}\,dx$ نعوض

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|e^{x}+1| + c$

(2) $\int \frac{(\ln(x))^{2}}{x}\,dx = \int (\ln(x))^{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$

نجري تغير المتحول

بفرض $\ln(x) = t \Leftarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$ نعوض

$= \int t^{2}\,dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} + c = \frac{t^{3}}{3} + c$

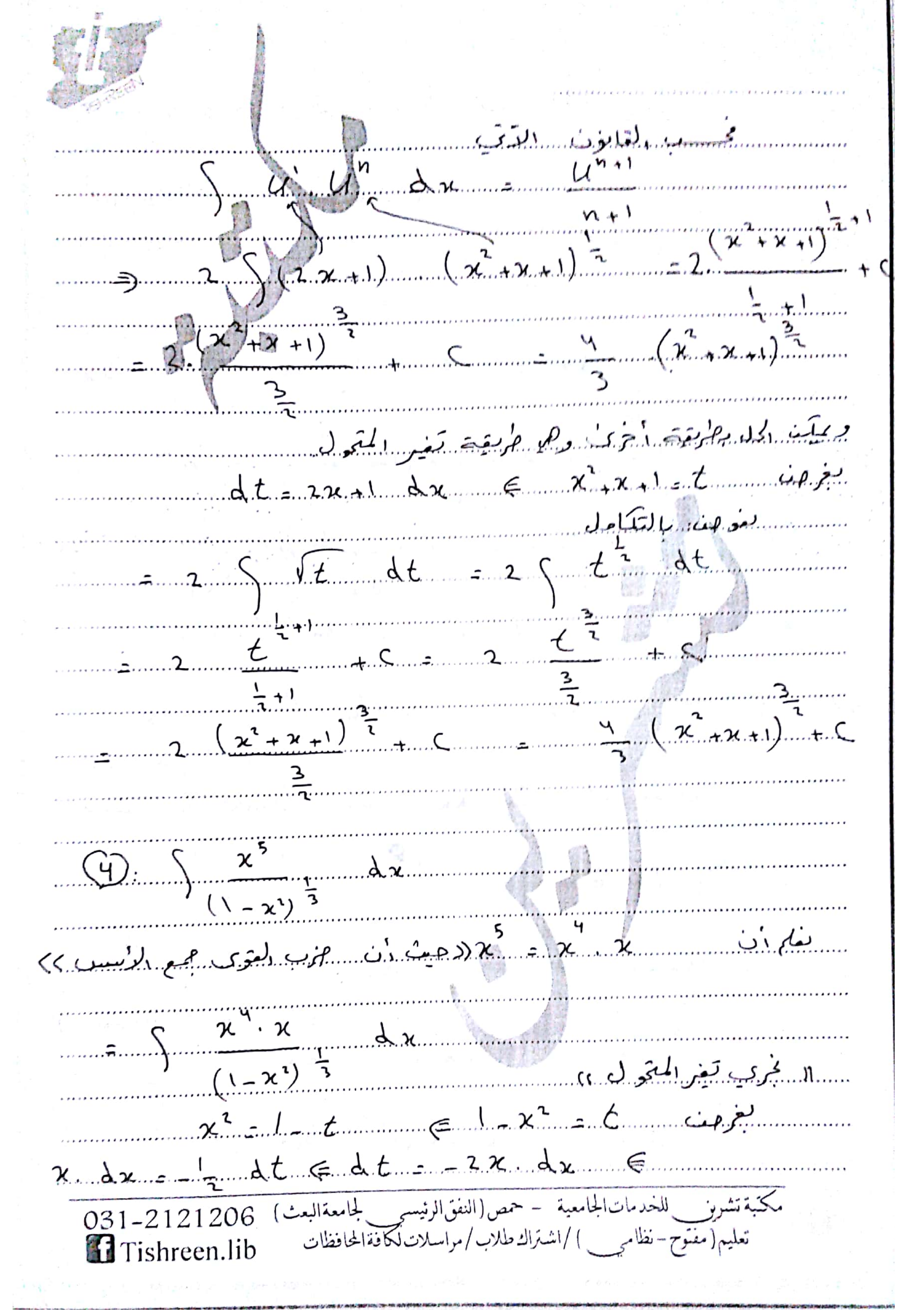
(3) $\int (4x+2) \cdot \sqrt{x^{2}+x+1}\,dx$

((ونعلم أن الجذر هو قوة $\frac{1}{2}$))

اخراج عامل مشترك

$= \int 2(2x+1) \cdot (x^{2}+x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= 2\int (2x+1) \cdot (x^{2}+x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$



نحسب بالقانون الآتي

$$\int u' \cdot u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow 2\int (2x+1)(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 2 \cdot \frac{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}$$

ويمكن الحل بطريقة أخرى وهي طريقة تغير المتحول

بفرض $x^2+x+1 = t \Leftarrow dt = 2x+1 \, dx$

نعوض بالتكامل

$$= 2\int \sqrt{t} \, dt = 2\int t^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$= 2\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= 2\frac{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(4): $\int \frac{x^5}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx$

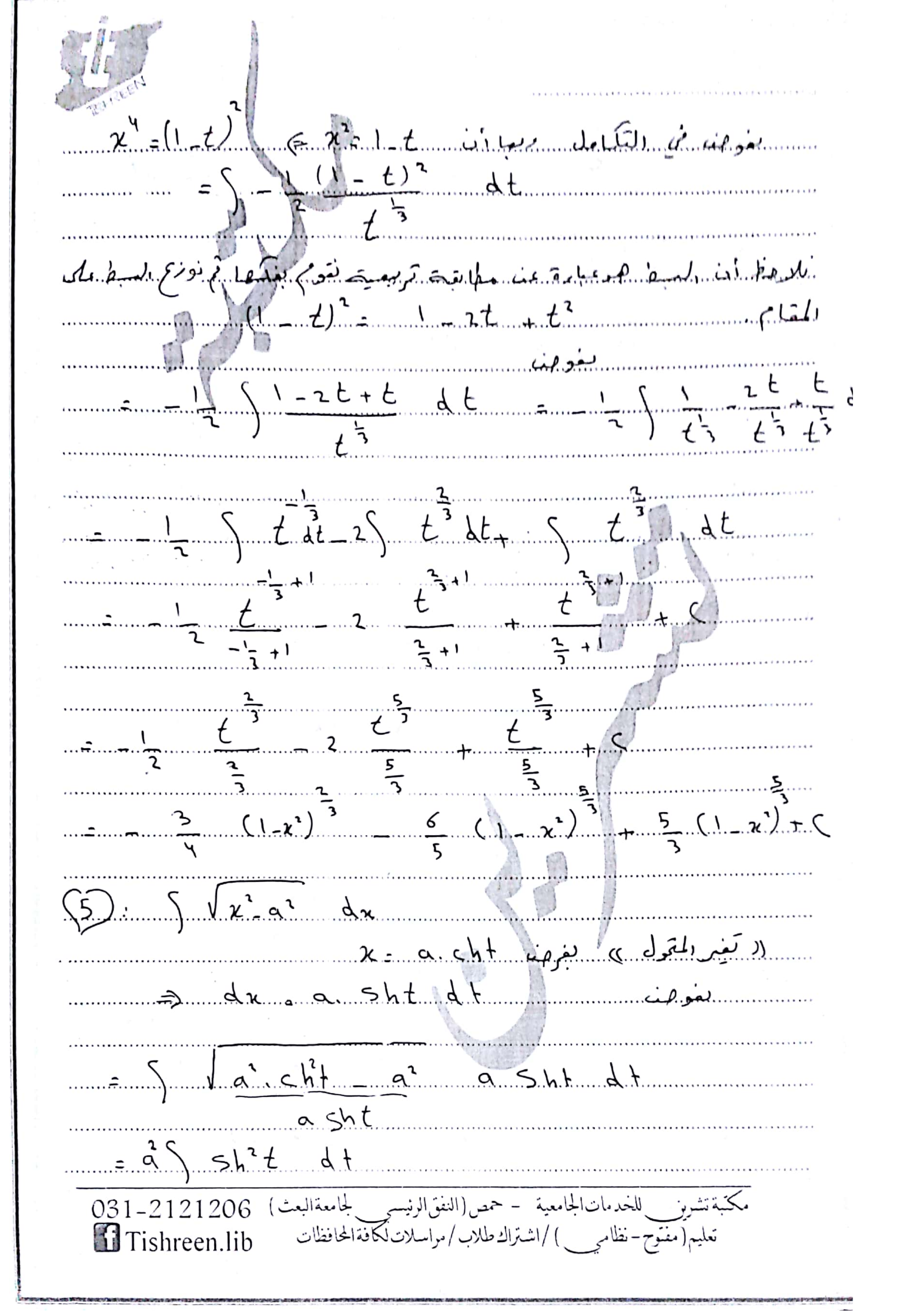
نعلم أن $x^5 = x^4 \cdot x$ «حيث أن ضرب القوى جمع الأسس»

$$= \int \frac{x^4 \cdot x}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx$$

«نجري تغير المتحول»

بفرض $1-x^2 = t \Rightarrow x^2 = 1-t$

$\Rightarrow dt = -2x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = -\frac{1}{2} dt$



نعوض في التكامل وبما أن $x^2 = 1 - t \Rightarrow x^4 = (1-t)^2$

$$= \int -\frac{1}{2}\,\frac{(1-t)^2}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt$$

نلاحظ أن البسط عبارة عن مطابقة تربيعية نقوم بفكها ثم نوزع البسط على المقام.

$$(1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$$

نعوض

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1-2t+t}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{2t}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{t}{t^{\frac{1}{3}}}\,d$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt - 2\int t^{\frac{2}{3}}\,dt + \int t^{\frac{2}{3}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2\,\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 2\,\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{4}(1-x^2)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}(1-x^2)^{\frac{5}{3}} + C$$

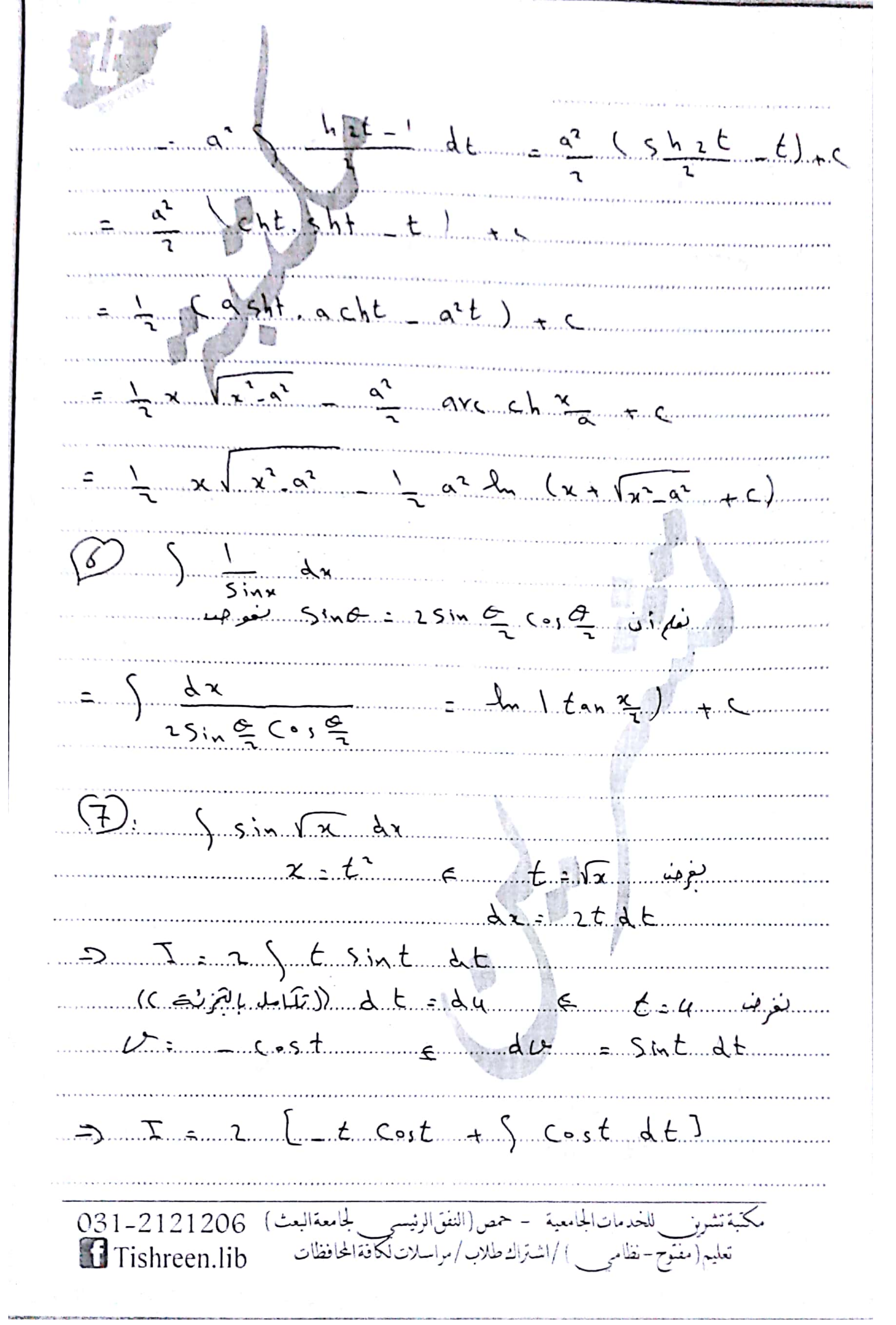
(5): $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

« تغيير المتحول » نفرض $x = a\,ch\,t$

نعوض $\Rightarrow dx = a\,sh\,t\,dt$

$$= \int \underbrace{\sqrt{a^2\,ch^2 t - a^2}}_{a\,sh\,t}\; a\,sh\,t\,dt$$

$$= a^2 \int sh^2 t\,dt$$



$= a^2 \int \frac{ch\,2t - 1}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{sh\,2t}{2} - t\right) + c$

$= \frac{a^2}{2}\left(ch\,t . sh\,t - t\right) + c$

$= \frac{1}{2}\left(a\,sh\,t . a\,ch\,t - a^2 t\right) + c$

$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\, arc\,ch \frac{x}{a} + c$

$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2} + c\right)$

(6) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$

نعلم أن $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ نعوض

$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$

(7): $\int \sin\sqrt{x}\, dx$

نفرض $t = \sqrt{x}$ و $x = t^2$

$dx = 2t\, dt$

$\Rightarrow I = 2\int t \sin t\, dt$

نفرض $t = u$ و $dt = du$ ((تكامل بالتجزئة))

$dv = \sin t\, dt$ و $v = -\cos t$

$\Rightarrow I = 2\left[-t\cos t + \int \cos t\, dt\right]$

$I = 2[-t\cos t + \sin t] + c$

$I = 2[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}] + c$

(8) $\int e^{\sin x} \sin(2x)\, dx$

$= 2\int e^{\sin x} \sin x \cos x\, dx$

نفرض $\sin x = t \in dt = \cos x\, dx$

$= 2\int e^{t} . t . dt$

نستخدم التكامل بالتجزئة نفرض $u = t$ منه $du = dt$

$dv = e^{t} dt \in v = e^{t}$

$\Rightarrow I = 2[t.e^{t} - \int e^{t} dt] = 2[t.e^{t} - e^{t}] + c$

$= 2[\sin x . e^{\sin x} - e^{\sin x}] + c$

(9) $\int \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2} dx = \int \ln(x+2) \cdot \frac{1}{(x+2)^2} dx$

نستخدم التكامل بالتجزئة نفرض $u = \ln(x+2) \in du = \frac{1}{x+2} dx$

$dv = \frac{1}{(x+2)^2} dx \in v = \frac{-1}{x+2}$

$\Rightarrow I = \frac{-\ln(x+2)}{x+2} + \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$

$= \frac{-\ln(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2} + c$

$= \frac{-\ln(x+2) - 1}{x+2} + c$

(10) $I = \int \frac{\arcsin x}{(1+x^2)} dx$

نستخدم تغير المتحول

نفرض $\arcsin x = t \Leftarrow x = \sin t$

$\Leftarrow dx = \cos t \cdot dt$

$\Rightarrow I = \int \frac{t}{1+\sin^2 t} \cos t \, dt$

$= \int t \frac{dt}{\cos^2 t}$

التكامل بالتجزئة $t = u \Leftarrow dt = du$

$v = \tan t \Leftarrow dv = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$\Rightarrow I = t \cdot \tan t - \int \tan t \cdot dt = t \cdot \tan t + \ln \cos t + c$

$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2} + c$

انتهت المحاضرة الأولى!

((مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح))

إعداد: فاطمة الشميني